

Egy szélsőérték - feladat kontytetőre

Az [1] munkában találtuk az alábbi feladatot.

A feladat

Egy házhoz téglalap alaprajzú, adott magasságú – vélhetően – kontytetőt kell építenünk. Az eresztvonalak mind egyazon vízszintes síkban helyezkednek el.

Végezzünk gazdaságossági számítást arra nézve, hogy milyen alakú legyen a tető, hogy a felhasznált anyagok mennyisége – és ezzel a költsége is – a lehető legkisebb legyen!

Mielőtt nekifognánk a részletezésnek, előrebocsátjuk, hogy ez egy matek - feladat, nem pedig egy valóságos szakmai számítás. Erre később még visszatérünk.

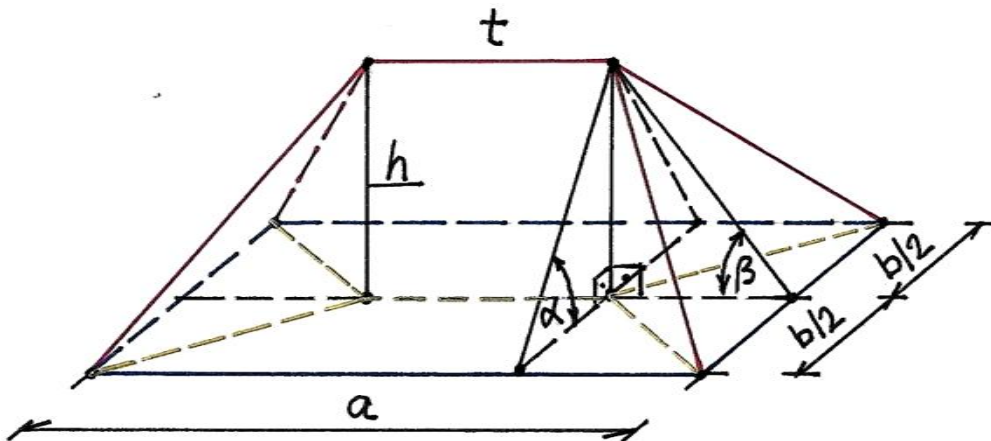
A megoldás

A feladat kiírása az alábbi.

Adott: a, b, h .

Keresett: A_{min} .

A folytatáshoz tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Itt a kontytető axonometrikus vázlatrajza látható, a főbb adatokkal együtt.

A számítás alapja az az elgondolás, hogy minél kisebb a tető felszíne, annál kisebbek lesznek az ezzel kapcsolatos költségek is. Ezért meg kell határoznunk, hogy milyen esetben lehet a tető A felszínre minimum. A szimmetrikus tető felszínének kifejezése:

$$A = 2 \cdot \frac{T_{tr}}{\cos \alpha} + 2 \cdot \frac{T_{hár}}{\cos \beta} ; \quad (1)$$

$$T_{tr} = \frac{a+t}{2} \cdot \frac{b}{2}, \quad T_{hár} = \frac{b}{2} \cdot \frac{a-t}{2}; \quad (2)$$

ámde:

$$\frac{a-t}{2} = \frac{h}{\operatorname{tg} \beta} \rightarrow a-t = 2 \cdot \frac{h}{\operatorname{tg} \beta} \rightarrow t = a - 2 \cdot \frac{h}{\operatorname{tg} \beta}; \quad (3)$$

most (2 / 1) és (3) - mal:

$$\frac{a+t}{2} = a - \frac{h}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (4)$$

Majd (1), (2), (3) és (4) - gyel:

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{a+t}{2} \cdot \frac{b}{2} + 2 \cdot \frac{1}{\cos \beta} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{a-t}{2} = 2 \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \left(a - \frac{h}{\operatorname{tg} \beta}\right) \cdot \frac{b}{2} + 2 \cdot \frac{1}{\cos \beta} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{\operatorname{tg} \beta} = \\ &= \frac{b}{\cos \alpha} \cdot \left(a - \frac{h}{\operatorname{tg} \beta}\right) + \frac{1}{\cos \beta} \cdot b \cdot \frac{h}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{a \cdot b}{\cos \alpha} - \frac{b \cdot h}{\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} + \frac{b \cdot h}{\cos \beta \cdot \operatorname{tg} \beta} = \\ &= \frac{a \cdot b}{\cos \alpha} - \frac{b \cdot h}{\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} + \frac{b \cdot h}{\sin \beta} = \frac{a \cdot b}{\cos \alpha} + b \cdot h \cdot \left(\frac{1}{\sin \beta} - \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}\right) = \\ &= \frac{a \cdot b}{\cos \alpha} + \frac{b \cdot h}{\cos \alpha} \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta}\right) = \frac{a \cdot b}{\cos \alpha} + \frac{b \cdot h}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \beta}, \text{ tehát:} \\ A &= \frac{a \cdot b}{\cos \alpha} + \frac{b \cdot h}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \beta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Adatok az ábrázoláshoz:

$$a = 10 \text{ m}, \quad b = 6 \text{ m}, \quad h = 3 \text{ m}. \quad (A / 1)$$

Ekkor:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{b/2} = \frac{3}{3} = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ \rightarrow \cos \alpha = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (A / 2)$$

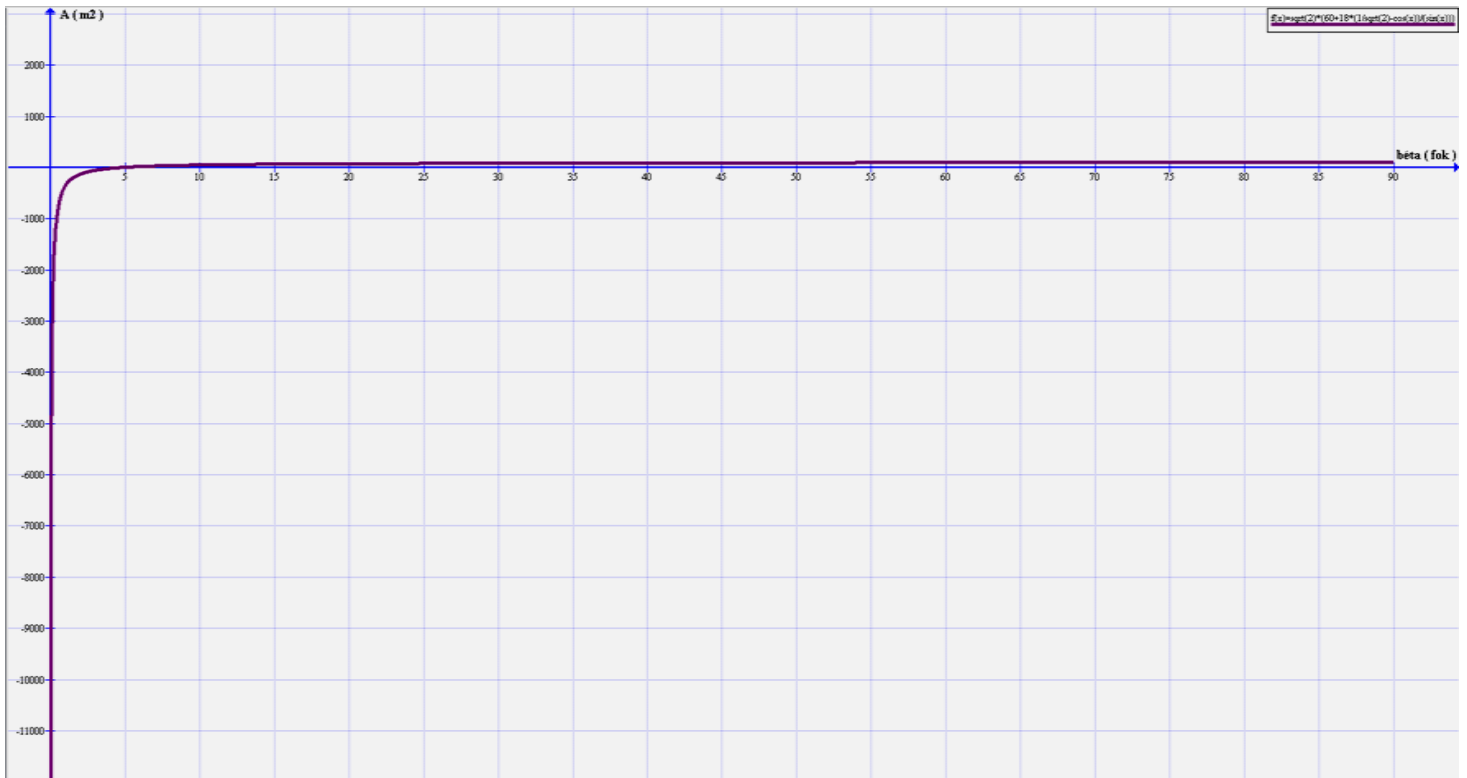
így (A) és (5) - tel:

$$A = \frac{10 \text{ m} \cdot 6 \text{ m}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{6 \text{ m} \cdot 3 \text{ m}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos \beta}{\sin \beta} = \sqrt{2} \cdot \left(60 + 18 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos \beta}{\sin \beta}\right) \text{ m}^2. \quad (a)$$

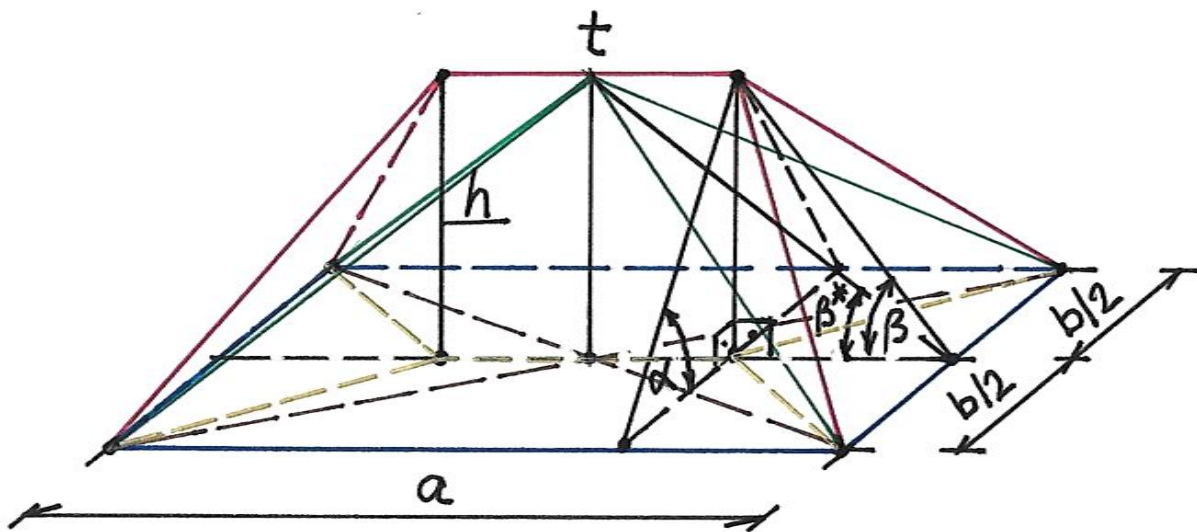
Az (a) függvény grafikonját a 2. ábrán mutatjuk.

Erről leolvasható, hogy az (a), illetve az (5) függvény is növekvő, így nincs lokális szélső értéke. Ezért a β szög értékét a lehető legkisebbre kell felvenni, hogy a tető felszíne is a lehető legkisebb legyen. Az ennek megfelelő hajlás – 3. ábra –:

$$t^* = a - 2 \cdot \frac{h}{\operatorname{tg} \beta^*} = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \beta^* = \frac{2 \cdot h}{a} \rightarrow \underline{\underline{\beta^* = \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cdot h}{a}\right)}}. \quad (6)$$



2. ábra



3. ábra

A minimális tetőfelszín ekkor, (5) és (6) - tal:

$$\begin{aligned}
 A^* &= \frac{a \cdot b}{\cos \alpha} + \frac{b \cdot h}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha - \cos \beta^*}{\sin \beta^*} = \frac{b}{\cos \alpha} \cdot \left[a + h \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \beta^*} - \frac{1}{\tan \beta^*} \right) \right] = \\
 &= \frac{b}{\cos \alpha} \cdot \left[a + h \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\tan \beta^*} \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \beta^*} - \frac{1}{\tan \beta^*} \right) \right] = \\
 &= \frac{b}{\cos \alpha} \cdot \left[a + \frac{h}{\tan \beta^*} \cdot (\cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \beta^*} - 1) \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b}{\cos \alpha} \cdot \left[a + \frac{a}{2} \cdot (\cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta^*} - 1) \right] = \frac{b}{\cos \alpha} \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta^*} \right) = \\
&= \frac{a \cdot b}{2 \cdot \cos \alpha} \cdot (1 + \cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta^*}) = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta^*} \right) = \\
&= \frac{a \cdot b}{2} \cdot (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta^*}) = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot h}{b} \right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot h}{a} \right)^2} \right], \text{ tehát:} \\
\hline \hline
A^* = A_{\min} &= \frac{a \cdot b}{2} \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot h}{a} \right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot h}{b} \right)^2} \right]. \quad (7)
\end{aligned}$$

Tehát a keresett tetőalak egy **a**, **b**, **h** adatokkal bíró *sátortető*.

Megjegyzések:

M1. A feladat eredeti megfogalmazását némiképpen megváltoztattuk, az általunk használt szakkifejezésekkel.

M2. Azért nem lehet $\beta < \beta^*$, mert akkor nem tudnánk tartani az előírt **h** magasságot.

M3. Látjuk, hogy a fenti kontytető minimális felszíne esetében a tetősík - idomok mind háromszögek, a kontytető pedig sátortetővé fajult el.

M4. Egy régebbi dolgozatunk – melynek címe: *Egy találós kérdésről* – rokon feladattal foglalkozik. A téma iránt érdeklődő Olvasónak ajánljuk tanulmányozását, mert erősen kapcsolódik az ittenihez. A felvezetésben említettük, hogy még visszatérünk arra, hogy az itteni nem egy szakmai számítás. Valójában az előbb említett régebbi dolgozatunkban olvashatók az ezzel kapcsolatos lényegi észrevételeink.

M5. A feladat megoldása után visszatekintve azt gondolhatná valaki, hogy ez egy nyilvánvalóan egyszerű feladat, melynek végeredménye számítás nélkül is kitalálható. Ez lehet, hogy így van; ámde ezt a feladatot – és megoldását is – középiskolásoknak szánjuk, akiknél a „nyilvánvaló” kifejezés használata talán még túlzásnak tűnhet. Egyébként [1] - ben * - gal jelölték meg ezt a feladatot is, mint egy nehezebbnek tartottat. Mi, akik e feladatot átvettük és feldolgoztuk, úgy véljük, hogy egyáltalán nem volt haszontalan a vele való foglalkozás, mert ez mintegy visszamenőleg megalapozza, előkészíti az említett régebbi dolgozatunkat. Meglehet, az ottani feladat (eredeti) kitalálója is ismerte az itteni feladatot és megoldását, így erre építhette azt. A feladatok eléggé nemzetköziek, készítőjük nem mindig ismert. Mi mindig megnevezzük forrásainkat.

Forrás:

[1] – **D. Sz. Ljudmilov**: Zadaci bez ciszlovüh dannüh
Ucspedgiz, Moszkva, 1961.

Összeállította: *Galgóczy Gyula*
ny. mérnöktanár

Szödliget, 2020. 09. 08.

Továbbiak: <https://galgoczy.net/>